

室温下多晶铍宏观非弹性回复的数学特征

何力军¹, 房辉¹, 李美岁², 马宏昌¹, 陈磊¹, 张健康², 许德美², 钟景明²

(1. 宁夏大学 宁夏光伏材料重点实验室, 宁夏 银川 750021)

(2. 西北稀有金属材料研究院 稀有金属特种材料国家重点实验室, 宁夏 石嘴山 753000)

摘要: 采用循环加卸载的单轴拉伸试验, 得到室温下不同延伸率的多晶铍试样的塑性变形、弹性回复变形、非弹性回复变形数据。对非弹性回复变形的数学特征进行了分析, 建立相应的表达函数。结果表明: 完全卸载条件下, 铍非弹性回复变形与塑性变形间呈幂函数关联; 非完全卸载条件下, 二者关系也可用幂函数描述; 幂函数所有 2 个参数与卸载应力水平呈二次函数关系, 2 个参数间也线性相关; 在同一卸载周期内, 非弹性回复变形与塑性变形间呈二次函数关系, 其中至少 2 个函数参数表现出超越具体试样的普适性数学特征; 弹性模量(或可能延伸率)与各数学模型参数变化趋势的关联明显。

关键词: 多晶铍; 循环卸加载; 非弹性回复; 幂函数

中图分类号: TG146.24

文献标识码: A

文章编号: 1002-185X(2019)12-3954-07

多晶铍(即金属铍)具有优异的力学性能, 特别是其比刚度(即弹性模量除以密度), 达到一般结构金属如铝、钛、铁等的 6 倍, 因此在要求尺寸稳定性高且重量轻的精密构件、航空、航天装备、导航仪表等领域, 铍有着关键性的应用^[1-7]。与尺寸稳定性相关的性能, 除刚度外还涉及两方面: 一是材料的微屈服性能, 关于此的研究已有不少^[8-15]。二是材料的非弹性变形回复性能。回复(本文专指力学回复)是指材料在卸载后, 已发生变形消除或部分消除的现象。弹性回复属于刚度性能, 行为特征简单。非弹性回复不同于弹性回复处在于, 其一应力与应变呈非线性关联; 其二非弹性回复过程中有能量损失, 其本质上仍属于塑性行为, 因此也被称为可回复塑性(recoverable plastic)。非弹性回复普遍存在于金属(合金)材料的力学行为中。依照相关理论如 K-G-L 模型等给出的解释^[16,17], 该行为源于材料内部位错与钉扎点缺陷间的相互作用, 位错线脱钉后形成的位错大弓在脱离前卸载会重新被钉扎, 宏观上便表现为非弹性回复; 一旦脱离, 就形成永久塑性变形。目前对非弹性回复行为的研究已在诸如铝合金、铁合金等多种金属(合金)材料上得到开展^[18-22], 而关于铍的相关研究报道尚未见到。究其原因, 一方面由于资源稀缺, 应用领域(国防、战略、核装置)敏感, 铍很少被作为基础性研究

的对象或素材; 另一方面可能与铍的加工工艺有关——铍构件一般不采用锻造方式, 所以在该工艺中常常需要关注的回弹问题对铍而言并不迫切。但准确了解非弹性回复行为的特点, 进而准确理解相关规律, 有助于实现对铍变形行为的精确控制, 这对铍构件在前所提及的应用领域更好地发挥作用具有重要意义。再就机制而言, 非弹性回复行为与塑性行为联系紧密, 亦可看作是弹、塑性行为间连接的桥梁, 认识、理解之, 对深入认识、理解铍的塑性行为, 进而认识、理解铍材料的力学本构行为和可靠性具有重要意义。因此本工作即以对铍非弹性回复行为的研究作为课题。

本工作采用如下研究路线: 室温下对多晶铍单轴卸/加载循环拉伸试验, 得到该加载方式下的应力应变曲线; 厘清铍变形的组成, 分析在不同应力水平上非弹性回复变形与塑性变形间的函数关系及相关参数的数学特征。循环卸/加载试验多见于力学疲劳问题的研究中, 本研究与此类循环试验的根本区别在于: 疲劳循环试验的加载频率在 10~10² Hz 范围, 或者更高, 本研究仅为 10⁻³ Hz 量级, 疲劳效应无需考虑。另一方面, 本试验中的应变速率约在 10⁻⁵ s⁻¹, 较动力学过程至少低 4~5 个数量级, 动力学效应亦可忽略。因此, 本试验仍属于准静态过程。准静态循环试验目前已在损伤力学领域得到广泛采用, 由此可以测得表观弹性

收稿日期: 2018-12-25

基金项目: 西北稀有金属材料研究院稀有金属特种材料国家重点实验室开放课题基金 (SKL2017K001); 宁夏自然科学基金 (NX17037)

作者简介: 何力军, 男, 1971 年生, 博士, 教授, 宁夏大学宁夏光伏材料重点实验室, 宁夏 银川 750021, 电话: 0951-2062414, E-mail: helijun2003@sohu.com

模量、损伤变量、耗散能、损伤能量耗散率等有关力学量的演化规律^[23,24]。

1 实验

试验在室温下进行，所用 4 组试样均加工自粉末热等静压工艺金属铍材。力学性能检测依据国家标准《GB/T228-2002 金属室温拉伸方法》，试样为圆形非比例试样，如图 1 所示。材料化学成分分析采用国家军用标准《GJB2513A-2008 铍化学分析方法》。材料化学成分（质量分数，%）为：Be 98.2~99.5，BeO 0.5~1.6，C 0.03~0.05，Fe 0.05~1.0，Si 0.01~0.02，其它杂质≤0.005。试验前各试样均经过光亮化铣去除表面机械加工损伤层程序。

试验平台为 Instron5582 型材料试验机。设定拉伸速率为 5 mm/min。循环加载过程采用应变控制，即通过在程序中编写算法来实现应变控制卸载位置，具体而言，试验的试样在 0.2%到 1%的变形区内以应变 0.1%为卸载-加载循环安排间隔，超过 1%后按应变 0.25%为安排间隔。

2 实验结果

4 组加载试样（分别以 T1、T2、T3、T4 编号）的循环加载拉伸结果如表 1 所示。

以试样 T3 为例给出多晶铍的单轴循环加载应变全曲线，如图 2。

3 分析与讨论

3.1 总变形的构成

由前文分析知道，试样变形 ϵ 由 3 部分构成

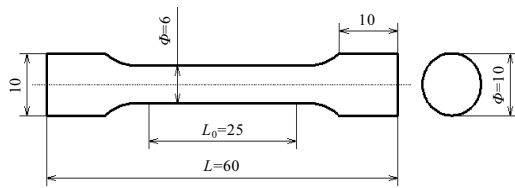


图 1 试样尺寸图 (mm)
Fig.1 Specimen configuration (mm)

表 1 试件拉伸力学性能

| Specimen | Elastic modulus/GPa | Tensile strength/MPa | Elongation/% |
|----------|---------------------|----------------------|--------------|
| T1 | 275.93 | 442.79 | 3.86 |
| T2 | 300.27 | 536.69 | 4.51 |
| T3 | 304.57 | 560.63 | 5.19 |
| T4 | 317.47 | 542.58 | 6.01 |

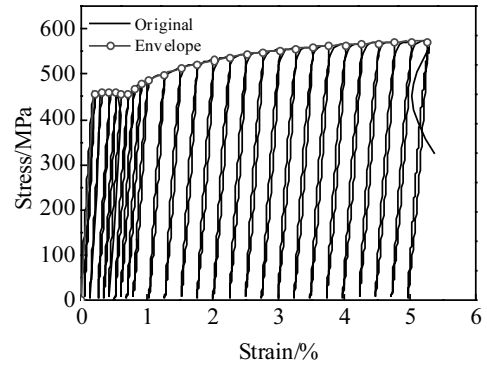


图 2 试样 T3 单向循环加载/卸载应力应变曲线
Fig.2 Uniaxial cyclic loading/unloading stress-strain curve of specimen T3

$$\epsilon = \epsilon_p + \epsilon_e + \epsilon_{ie} \tag{1}$$

式中， ϵ_p 为永久塑性变形， ϵ_e 为弹性回复变形， ϵ_{ie} 为非弹性回复变形（在常见的材料力学行为分析中，多将回复变形全部归为弹性，非弹性部分不另析出）。

仍以试样 T3 中的任一循环加载周期为例，说明式(1)中各变形量的意义。取图 2 中 1 个循环加载周期，如试样拉伸至预应变 2.25%处的第 14 周期，示于图 3。

可以看到，卸载曲线（右边 D→A）与再加载曲线（左边 A→D）均为非线性，且不重合。卸载开始时的总变形 ϵ 由点 D 对应的横坐标（即点 C）标定，在本例中为 2.25%。卸载至 A 完成，点 A 横坐标给出卸载完成时试样的永久塑性变形 ϵ_p ，在本图例中为 2%。于是得试样在本周期的总回复 $\epsilon - \epsilon_p$ 为 AC 段。DB 线为弹性变形卸载曲线，其斜率为 T3 样的弹性模量 304.57 GPa（见表 1），总弹性回复量 ϵ_e 由 BC 段表示，在本例中为 0.166%；则非弹性回复量 ϵ_{ie} 由总回复减

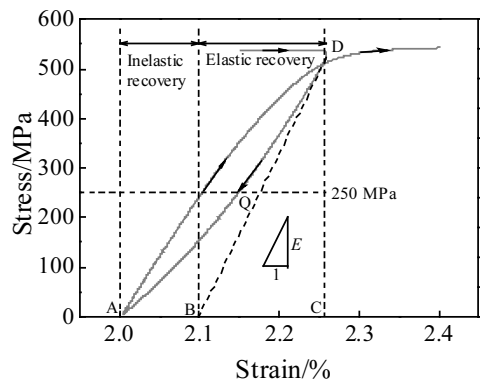


图 3 试样 T3 对应于 2.25% 预应变的卸载/加载曲线
Fig.3 Unloading/loading curve of specimen T3 at the prestrain of 2.25%

去弹性回复给出，即 AB 段，本图例中为 0.084%。

此段描述即是本研究自实测数据中提取各变形分量分量的方法。通常的单调加载 (monotonic loading) 试验 (得到的是如图 2 中的包络线) 只能获得 ϵ 、 ϵ_e ，无法析分出 ϵ_{ie} 和 ϵ_p ，因而也无法对变形进行深入的分析。

3.2 卸载至零应力水平的非弹性回复

考虑非弹性回复变形 ϵ_{ie} 的演化规律，以其与永久塑性变形 ϵ_p 的依赖关系为研究对象—如前所述，非弹性回复变形本质上仍属于塑性变形，卸载不发生时，非弹性回复变形便转化为永久塑性变形。利用 3.1 节的变形析分方法，得到所有 4 个试样卸载至零应力水平的非弹性回复 ϵ_{ie} 及永久塑性变形 ϵ_p 数据，分别以纵横坐标绘出，点示于图 4 中。

分析各试样 ϵ_{ie} 与 ϵ_p 数据点的关联性我们发现，二者的对数形式间线性相关，可表达为

$$\ln \epsilon_{ie} = \ln a + b \ln \epsilon_p \quad (2)$$

式中， a 、 b 为回归常数。

由此得

$$\epsilon_{ie} = a\epsilon_p^b \quad (3)$$

即 ϵ_{ie} 与 ϵ_p 间存在幂函数关系。式(3)的回归结果也绘于图 4 中，各图拟合度 R^2 值在 0.995~0.999 间。

3.3 卸载至非零应力水平的非弹性回复

上节给出了 ϵ_{ie} 与 ϵ_p 在卸载至零应力水平 (即图 3

中的 A 点) 条件下满足的函数关系，若载荷卸至非零的应力水平，则二者的关系又是怎样呢？

还是以 T3 为例，说明卸载至非零情况下 ϵ_{ie} 与 ϵ_p 的提取。考虑图 3 示周期卸载至 250 MPa，即沿卸载线 DA 进至点 Q，过点 Q 的水平虚线为 250 MPa 载荷等值线。对该点处的变形分解方法完全同前：对应点 Q 卸载前的总变形仍为点 D 的应变值，即垂线 DC 交横轴点 C 的坐标值 x_C —对卸载线 DA 上的所有点，卸载前的总变形均等于此值。该应力水平的永久塑性变形 ϵ_p 等于载荷等值线与卸载线 DA 交点 Q 的横坐标值 x_Q ，则非弹性回复变形 ϵ_{ie} 的值等于 $x_C - x_Q - (\sigma_D - \sigma_Q)/E$ ， σ_D 、 σ_Q 分别为 D、Q 处的应力值， E 为弹性模量。对 T3 所有共 26 个周期卸载至 250 MPa 应力水平的变形进行分解，得到共 26 对 ϵ_{ie} 、 ϵ_p 数据。该数据系列将在数据图中形成一条离散点线，代表卸载至 250 MPa 应力水平的情况，恰如图 4 中各线代表卸载至零应力水平情况。再对其它应力水平 (如 5, 25, 50, 75, 100, 125, 150, 175 MPa 等) 进行同样的工作，并延至 T1、T2、T4 各样。于是得到对应各试样、各应力水平下 ϵ_{ie} 与 ϵ_p 数据系列。

我们发现， $\ln \epsilon_{ie}$ 与 $\ln \epsilon_p$ 的值之间的线性关系依然成立 (尤其对低卸载应力水平，这一特征更为明确)。换句话说，对于卸载至非零应力水平的 ϵ_{ie} 与 ϵ_p ，二者关

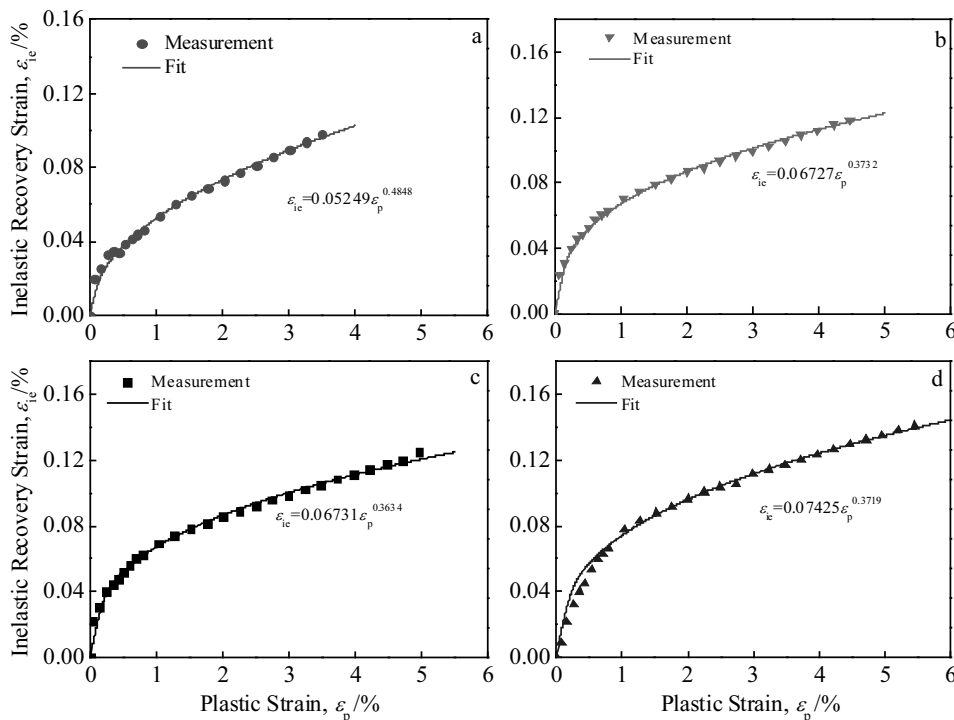


图 4 不同试样非弹性回复应变与塑性应变的关系

Fig.4 Relationship between inelastic recovery strain and plastic strain of different specimens: (a) T1, (b) T2, (c) T3, and (d) T4

系仍可用式(2)、(3)进行描述，幂函数规律具有普遍性。

至于卸载应力水平对 ϵ_{ie} 与 ϵ_p 关系的影响，显然应该由 a 、 b 来体现。于是我们对各试样各周期由式(2)、(3)确定的 a 、 b 与卸载应力水平 σ 的关系进行分析，

发现 $\ln a$ 、 b 皆与 σ 呈二次函数关系，即

$$\ln a = A_a \sigma^2 + B_a \sigma + C_a \quad (4)$$

$$b = A_b \sigma^2 + B_b \sigma + C_b \quad (5)$$

式中， A_a 、 B_a 、 C_a ， A_b 、 B_b 、 C_b 分别是两式的拟合参数。

各式的具体拟合情况见图 5。图中各曲线的拟合度 R^2 值在 0.995~0.9996 间。

由图 5 可以看出，参数 a 、 b 各自曲线在图中均按 T1~T4 的试样编号次序排列，而试样次序是按其弹性模量值的大小确定的（见表 1），可以推测，弹性模量对 a 、 b 有重要影响。由表 1 知此次序亦同于延伸率的大小次序。一般的，延伸率的分散性较大，对诸多偶然因素敏感（尤其是像钼这样的脆性金属），不及弹性模量值稳定。此处弹性模量与延伸率有如此明确的正相关，或带有一定的偶然性。

将卸载应力水平的影响式(4)、式(5)代入式(2)，得到在不同卸载应力水平下描述 ϵ_{ie} 与 ϵ_p 关系的统一表达式为

$$\epsilon_{ie} = \exp(A_a \sigma^2 + B_a \sigma + C_a) \epsilon_p^{A_b \sigma^2 + B_b \sigma + C_b} \quad (6)$$

分别绘出各试样在不同卸载应力水平上的 ϵ_{ie} 与 ϵ_p 试验

数据及由式(6)得到的拟合曲线，见图 6。

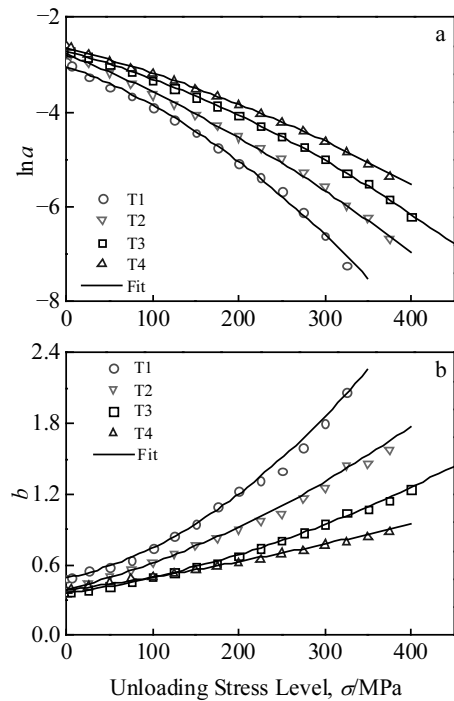


图 5 拟合参数与卸载应力水平的关系

Fig.5 Relationship between fit parameters and unloading stress level: (a) $\ln a$ - σ and (b) b - σ

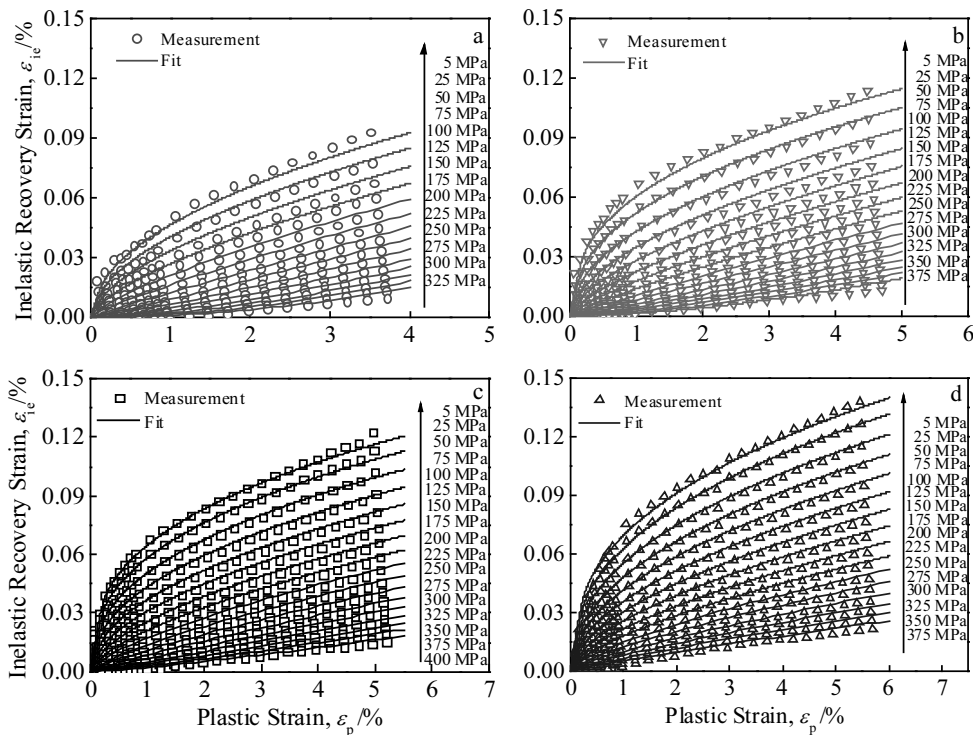


图 6 不同卸载应力水平下非弹性回复应变与塑性应变的关系

Fig.6 Relationship between inelastic recovery strain and plastic strain at different unloading levels: (a) T1, (b) T2, (c) T3, and (d) T4

a, b 各与 σ 间的二次函数关系看起来比较繁琐(见式(4)、(5)), 但 a, b 间其实存在有更为简练、直接的联系— b 与 $\ln a$ 线性相关, 即

$$b = P \ln a + Q \quad (7)$$

式中, P, Q 分别为回归线的斜率和截距。

各试样关于 b 与 $\ln a$ 的数据及式(7)回归线如图 7。观察图 7 可以发现, T1、T2、T4 几乎通过了同一点, 而 T3 距该公共点也相当近。这表明, 各试样的回归参数 P 与 Q 之间存在强的关联性。我们在图 8 中绘出了 4 个试样 P 与 Q 的数据点。可知, P, Q 间线性相关。图 7、8 中各曲线的拟合度 R^2 值在 0.995~0.999 间。

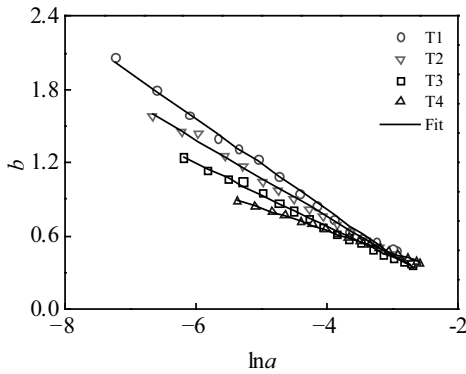


图 7 b, a 间的相互关系
Fig.7 Interrelation between b and a

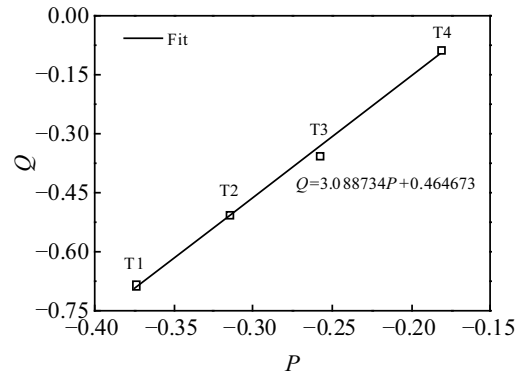


图 8 Q, P 间的相互关系
Fig.8 Interrelation between Q and P

3.4 卸加载周期内的非弹性回复

对各卸加载周期内, 其非弹性回复变形又是呈现出怎样的数学特征呢?

我们发现在各卸加载周期内, ϵ_{ie} 与 ϵ_p 间满足严格的二次函数关系, 即

$$\epsilon_{ie} - \epsilon_{ier} = k(\epsilon_p - \epsilon_{pr})^2 \quad (8)$$

式中, $k, \epsilon_{pr}, \epsilon_{ier}$ 为待定参数。

图 9 给出了 4 个试样所有周期内 ϵ_{ie} 与 ϵ_p 关系的实测数据曲线和式(9)回归结果, 高度的数据重合性直观地反映出此二者间二次函数依赖关系的确定性和可信度 (R^2 基本都在 0.999 以上)。

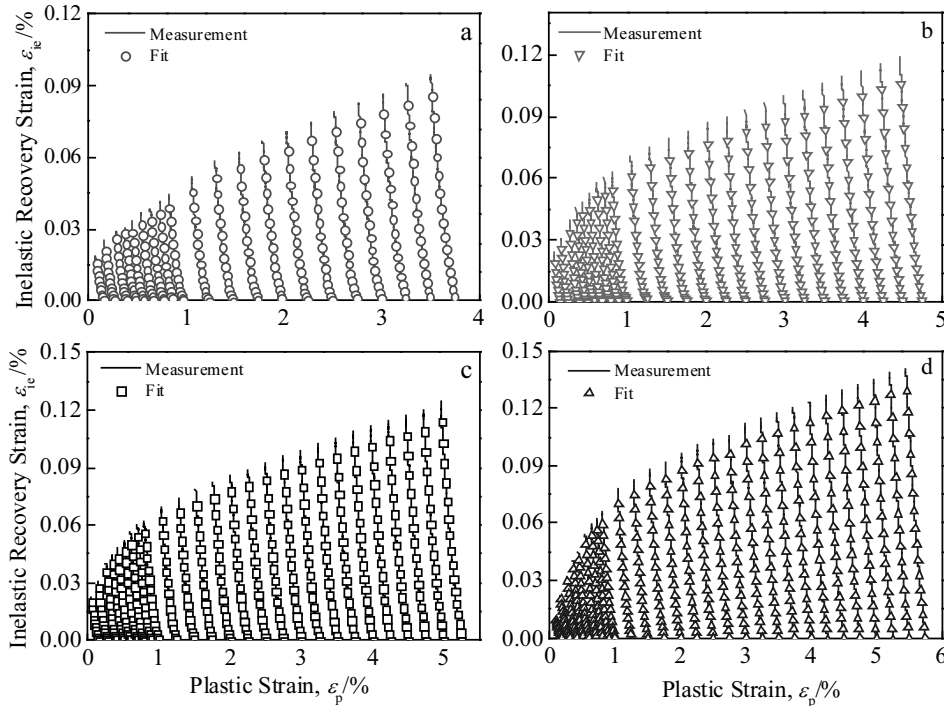
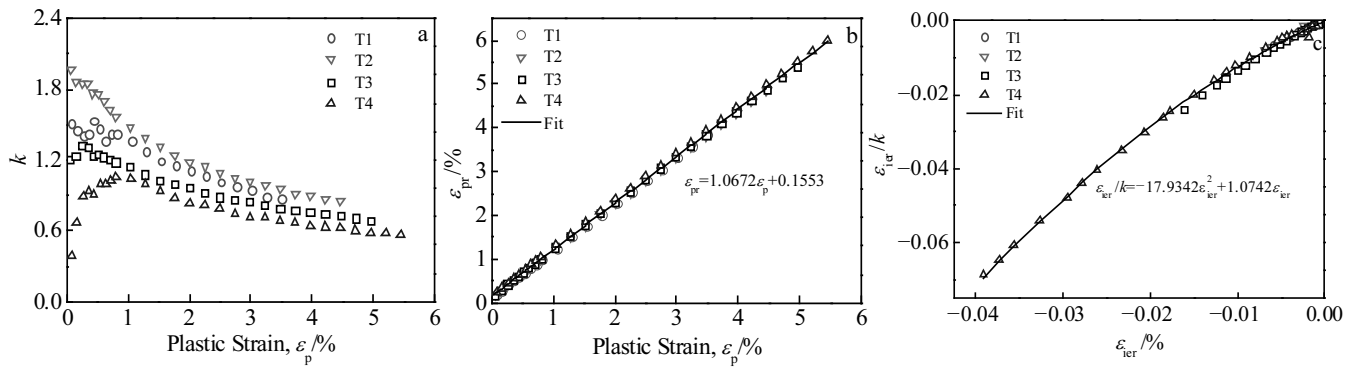


图 9 各周期内非弹性回复应变与塑性应变的关系

Fig.9 Relationship between inelastic recovery strain and plastic strain in each cycle: (a) T1, (b) T2, (c) T3, and (d) T4

图 10 参数 k 、 ε_{pr} 、 ε_{ier} 的数学特征Fig.10 Mathematical characteristics of parameters k , ε_{pr} , ε_{ier} : (a) k - ε_p , (b) ε_{pr} - ε_p , and (c) ε_{ier}/k - ε_{ier}

关于参数 k 、 ε_{pr} 、 ε_{ier} 变化的数学特征见图 10。由图知，随着弹性模量的增加（即 T1~T4 的顺序，见表 1）， k 曲线出现了一个先增长后下降的过程，这一特征在 T2、T3、T4 上均有体现，并逐步清晰，至 T3、T4 样开始出现峰值点。 ε_{pr} 则与各周期最低应力点对应的 ε_p （即卸载完成对应的永久塑性变形值，如图 3 中的 A 点坐标值）间满足严格的线性关系，且所有试样数据几乎完全共线（ $R^2=0.9994$ ）。 ε_{pr} 数据的集聚性表明，此线性关系具有普适性，对通常的材料性能差异并不敏感。对 ε_{ier} 的分析我们获知，不同试样其 ε_{ier} 关于 ε_p 的变化趋势较散漫，曲线数学特征不清晰（未在本文显示），但 ε_{ier} 与 k 的商 ε_{ier}/k 与 ε_{ier} 间呈现出显著的数据集聚性（所有试样数据基本共线），数学特征清晰，拟合曲线为二次曲线（ $R^2=0.999$ ）。

4 结 论

1) 完全卸载条件下，非弹性回复变形与永久塑性变形间的依赖性满足幂函数关系。

2) 非完全卸载条件下，非弹性回复变形与塑性变形间的依赖性仍可用幂函数予以描述，函数所有 2 个参数与卸载应力水平呈二次函数关系，同时 2 个参数间线性相关。

3) 在同一卸载周期内，非弹性回复变形与塑性变形间呈二次函数关系，至少 2 个函数参数表现出超越具体试样的普适性数学特征。

4) 总体而言，各数学模型参数表现出的变化趋势与弹性模量（亦或可能与延伸率）关联。

参考文献 References

[1] Marder J M. *Metal Handbook, Vol 7: Powder Metallurgy*[M]. Ohio: American Society for Metals, 1984: 169

- [2] Stonehouse A J. *Journal of Vacuum Science & Technology A Vacuum Surfaces & Films*[J], 1986, 4(3): 1163
- [3] Wang Yongyue(王永跃). *Rare Metal Materials and Engineering(稀有金属材料与工程)*[J], 1995, 24(6): 29
- [4] Tikhinskij G F, Stoev P I, Papirova I I *et al. Journal of Nuclear Materials*[J], 1996, 233-237: 828
- [5] Zhang Youshou(张友寿), Qin Youjun(秦有钧), Wu Dongzhou (吴东周) *et al. Transactions of the China Welding Institution(焊接学报)*[J], 2001, 22(6): 92
- [6] Boland M A. *Beryllium-Important for National Defense, 2012-3056*[R]. Reston, VA: US Geological Survey, 2012
- [7] Xu Demei(许德美), Qin Gaowu(秦高梧), Li Feng(李峰) *et al. The Chinese Journal of Nonferrous Metals(中国有色金属学报)*[J], 2014, 24(5): 1212
- [8] Brown N, Lukens Jr K F. *Acta Metallurgica*[J], 1961, 9(2): 106
- [9] Bonfield W, Li C H. *Acta Metallurgica*[J], 1963, 11(6): 585
- [10] Bonfield W, Li C H. *Acta Metallurgica*[J], 1964, 12(5): 577
- [11] Walters G P, Van Der Walt C M, Makin M J. *Journal of Nuclear Materials*[J], 1964, 11(3): 335
- [12] Bonfield W, Li C H. *Acta Metallurgica*[J], 1965, 13(3): 317
- [13] Lawley A, Breedis J F, Meakin J D. *Acta Metallurgica*[J], 1966, 14(10): 1339
- [14] Plane D C, Bonfield W. *Beryllium 1977: 4th Inter Conf on Beryllium*[C]. London: the Royal Society, 1977: 14
- [15] Zhong Jingming(钟景明). *Thesis for Doctorate(博士学位论文)*[D]. Changsha: Central South University, 2001
- [16] Granato A, Lücke K. *Journal of Applied Physics*[J], 1956, 27(6): 583
- [17] Feng Duan(冯端). *Metal Physics, Vol. 3(金属物理学第三卷)*[M]. Beijing: Science Press, 1999: 107

- [18] Yu Haiyan(余海燕), Chen Siji(陈思吉), He Zezhen(何泽珍). *Journal of Plasticity Engineering*(塑性工程学报)[J], 2017, 24(4): 1
- [19] Yu Haiyan, Li Bao. *International Journal of Minerals, Metallurgy and Materials*[J], 2011, 18: 185
- [20] Zhuang Jingbiao(庄京彪), Liu Dihui(刘迪辉), Li Guangyao(李光耀). *Journal of Mechanical Engineering*(机械工程学报)[J], 2013, 49(22): 84
- [21] Xu Hong(徐虹), Liu Ya'nan(刘亚楠), Yu Ting(于婷) *et al.* *Journal of Jilin University, Engineering and Technology Edition*(吉林大学学报, 工学版)[J], 2017, 47(1): 191
- [22] Cleveland R M, Ghosh A K. *International Journal of Plasticity*[J], 2002, 18(5-6): 769
- [23] Lemaitre J, Desmorat R. *Engineering Damage Mechanics*[M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005: 1
- [24] Yu Shouwen(余寿文). *Damage Mechanics*(损伤力学)[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1997: 1

Mathematical Characteristics of Macroscopic Inelastic Recovery of Polycrystalline Beryllium at Room Temperature

He Lijun¹, Fang Hui¹, Li Meisui², Ma Hongchang¹, Chen Lei¹, Zhang Jiankang², Xu Demei², Zhong Jingming²

(1. Ningxia Key Laboratory of Photovoltaic Materials, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

(2. State Key Laboratory of Special Rare Metal Materials, Northwest Metal Materials Research Institute, Shizuishan 753000, China)

Abstract: With the uniaxial cyclic loading/unloading test at room temperature, the data of the plastic deformation, elastic recovery deformation and inelastic recovery deformation of polycrystalline beryllium samples with different elongation were obtained. Investigation on mathematical characteristics of the inelastic recovery was carried out, and corresponding expression functions were obtained. The results indicate that after completely unloading, the relationship between inelastic recovery strain and plastic strain of beryllium can be described by the power function; even being incomplete unloading, their relationship can also be described by the power function; all the two function parameters are related to the unloading stress level in analytic form with the square polynomials, and the linear correlativity is presented between the two parameters; in the same unloading cycle, the relationship between inelastic recovery strain and plastic strain can be described by the square polynomials, and at least two function parameters show the universal mathematical characteristics beyond specific samples; the modulus of elasticity (also maybe the elongation) is closely relevant to trends of change of all mathematical model parameters.

Key words: polycrystalline beryllium; cyclic loading/unloading; inelastic recovery; power function

Corresponding author: Zhong Jingming, Ph. D., Professor, State Key Laboratory of Special Rare Metal Materials, Northwest Metal Materials Research Institute, Shizuishan 753000, P. R. China, Tel: 0086-952-2098003, E-mail: zhongjm@otic.com.cn