

基于数值模型的金属橡胶刚度特性细观机理研究

黄 凯¹, 白鸿柏¹, 路纯红¹, 曹凤利¹, 高洪飞²

(1. 陆军工程大学, 河北 石家庄 050003)

(2. 白城兵器试验中心, 吉林 白城 137000)

摘 要: 以基于实际材料、工艺参数建立的金属橡胶数值模型为基础, 对材料非线性刚度特性的细观机理进行了研究。从成形压力曲线、组织形态、尺寸、准静态加载曲线 4 个方面对数值模型进行了验证。对金属橡胶组织结构进行分解, 建立了弹性微元细观模型, 对弹性微元的空间运动模式和弹性变形模式进行了分析, 建立了金属橡胶非线性刚度特性的数学模型。在准静态加载过程中, 弹性微元的空间运动以平移为主, 空间转动很小; z 向弹性变形可以等效为若干曲梁的并联; xoy 平面内的弹性变形是一种使弹性微元两端点间距离变小的弯曲变形。数学模型与实验结果吻合良好, 包含了材料的基本结构参数、细观特征参数以及非线性刚度机理参数, 各参数物理意义明确, 对材料的设计具备一定的指导意义。

关键词: 金属橡胶; 非线性刚度; 细观机理; 数值模型

中图分类号: TB31; TB34

文献标识码: A

文章编号: 1002-185X(2018)10-3021-09

金属橡胶是一种具有耐高/低温、耐腐蚀、疲劳寿命长等优点的弹性多孔材料, 可以用于减振、缓冲、吸声、过滤等方面, 在军事、航空航天等领域具有重要的应用价值和广阔的应用前景^[1-3]。

当前, 各国学者对金属橡胶的刚度特性进行了广泛研究, 取得了丰硕成果。俄罗斯萨玛拉国立航空航天大学的学者提出了叠层悬臂梁模型和角锥模型, 用模型中悬臂梁(或角锥)的弹性变形以及悬臂梁(或角锥)之间的干摩擦作用对材料的宏观力学特性进行等效, 但是这类早期模型并没有考虑材料的细观形态^[4]。陈艳秋等人^[5]用微元曲梁组合模型建立了材料的应力-应变关系, 并根据实验现象对模型进行了修正。郭宝亭等人^[6]用微元弹簧组合模型描述了材料成形方向和非成形方向的刚度特性。彭威、李宇明等人^[7,8]建立了受轴向和径向载荷的微元弹簧的组合模型, 并用实验进行了修正。李宇燕等人^[9]结合多孔材料理论和曲梁模型描述了金属橡胶的非线性刚度。曹凤利等人^[10]以变长度曲梁组成的单匝螺旋卷为基本单元, 将模型的修正系数减少至 2 个。上述模型中, 引入了与材料细观形态相符的微元曲梁或微元弹簧作为细观基本单元, 用细观单元的组合能够较好地描述材料的刚度特性。然而由于金属橡胶的内部组织结构十分复杂且难以被准确获取, 这些模型不可避免地使用了唯象的方法进行建立, 这使得建立的数学模型中包含了物理意义并不十分明确的参数, 难以准确探究材料

受载时细观结构的实际变化情况。

本研究以基于实际材料、工艺参数建立的金属橡胶数值模型为基础, 对材料受载时的细观结构变化进行分析, 对非线性刚度特性的细观机理进行描述。建立细观结构模型和材料刚度特性的数学模型, 各参数物理意义明确, 能够较好地对金属橡胶非线性刚度特性的细观机理进行解释。

1 数值模型及可靠性验证

所研究的金属橡胶元件为环形, 如图 1a 所示, 外径 20 mm, 内径 12 mm, 材料为 304 不锈钢。数值模型如图 1b 所示, 其完全依据实际材料、工艺参数建立。为了便于研究, 模型尺寸截取了全构件周向尺寸的 1/6, 详细建模方法参见文献[11]。为了对数值模型的可靠性进行验证, 主要从成形压力曲线、材料组织结构形态、尺

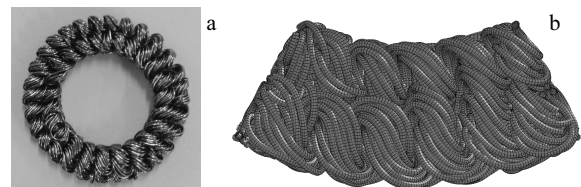


图 1 金属橡胶元件及数值模型

Fig.1 Component (a) and numerical model (b) of metal rubber

收稿日期: 2017-10-05

基金项目: 武器装备“十二五”预先研究项目

作者简介: 黄 凯, 男, 1987 年生, 博士生, 陆军工程大学, 河北 石家庄 050003, E-mail: hk420604@163.com

寸、静态刚度曲线等 4 个方面与实验进行对比。

1.1 冲压成形压力曲线验证

将数值模型与实际元件的冲压成形压力曲线进行对比(图 2)。可以看出,仿真曲线与实验符合良好,说明数值模型可以很好地反映实际元件的冲压成形过程。

1.2 材料组织结构形态验证

组织结构形态是金属橡胶最基本的形态特征,数值模型首先要在组织结构形态上和实际元件保持一致。图 3 为数值模型与实际元件在不同表面的组织结构形态对比。可以看出,无论是宏观特征还是金属丝的细观走向,数值模型都可以对实际元件进行准确反映。

1.3 尺寸验证

以相同材质、工艺参数建立的数值模型应当与实际元件尺寸相同。本文数值模型的内外径尺寸与实际元件相同,误差主要体现在成形方向上,即元件的厚度。表 1

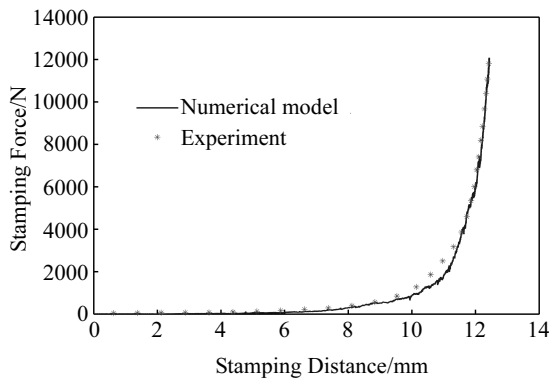


图 2 冲压成形压力曲线对比

Fig.2 Comparison of stamping force curve

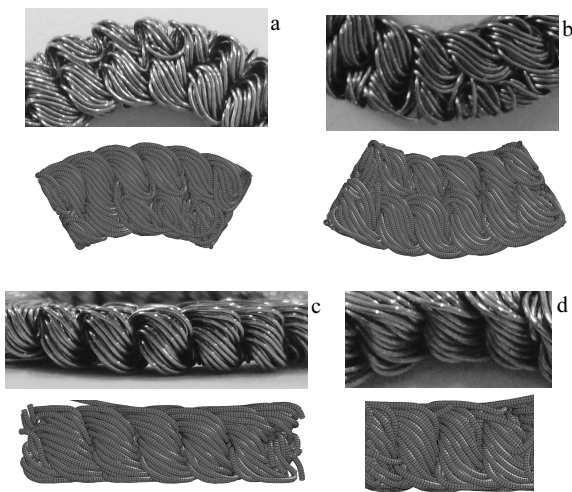


图 3 不同表面组织结构的形态对比

Fig.3 Comparison of different surface tissues: (a) upper surface, (b) under surface, (c) outside surface, and (d) internal surface

表 1 厚度尺寸对比

Table 1 Comparison of thickness

Specimen	Size of product/mm	Size of numerical model/mm	Error/%
1	3.20	3.42	6.88
2	2.70	2.93	8.52
3	2.44	2.69	10.25

为厚度尺寸对比。由表可知,成形方向上的尺寸平均误差为 8.55%,数值模型的尺寸与实际元件基本一致。

1.4 静态刚度曲线验证

除上述验证外,数值模型作为材料刚度特性的研究基础,必须对其非线性刚度进行验证,以保证分析的可靠性。分别取 3 组不同工艺参数对金属橡胶元件进行制备和数值计算。对实际元件和数值模型进行准静态加载。图 4 为试件 1 的加载曲线。可见,数值计算结果和实验曲线吻合良好,即数值模型可以较好地描述实际元件的非线性刚度特性。

以上 4 个方面的验证结果表明:金属橡胶数值模型作为材料非线性刚度特性研究的细观基础是可靠的,通过数值模型可以较容易地得到材料内部线匝的几何构型、空间坐标和接触状态。

2 细观结构变形状态分析

2.1 金属橡胶组织结构分解

金属橡胶毛坯经过冲压成形后,内部金属丝虽然还保持螺旋形态,但不再是冲压前较为规则的螺旋卷空间构型,金属丝各处曲率发生了较大变化。为了对金属橡胶内部细观结构在准静态加载时的变形状态进行分析,需要对金属丝进行截断,生成一系列细观结构。图 5 为模型内某一金属丝加载方向的节点坐标。在该曲线的极值点处将金属丝进行打断。按照该方法将数值模型内部

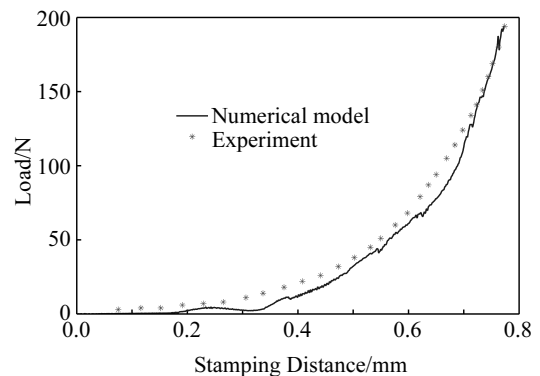


图 4 准静态加载曲线对比

Fig.4 Comparison of quasi-static loading curves

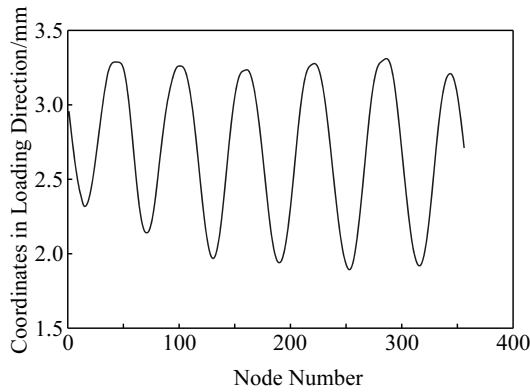


图 5 金属丝加载方向节点坐标

Fig.5 Coordinates of nodes of metal wire in loading direction

所有金属丝打断，共生成 572 段金属丝微元（下称弹性微元）。

2.2 建立弹性微元局部坐标

截断后的弹性微元如图 6 所示。弹性微元可以近似地视为平面曲梁。利用弹性微元上的节点坐标，拟合一个平面，令平面的法向量作为该微元局部坐标的 z 轴方向向量。令局部坐标 xoy 平面通过弹性微元的第 1 个节点，让弹性微元节点向局部坐标 xoy 平面投影，利用投影点坐标可以拟合成一段圆弧，令圆弧对应的圆心为局部坐标的原点。

设局部坐标 x 、 y 、 z 轴的单位方向向量在全局坐标系的描述分别为 (x_{11}, x_{12}, x_{13}) 、 (y_{11}, y_{12}, y_{13}) 、 (z_{11}, z_{12}, z_{13}) 。图 7 为局部坐标 z 轴单位方向向量 $\lambda_z = (z_{11}, z_{12}, z_{13})$ 在全

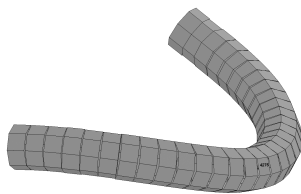


图 6 弹性微元示意图

Fig.6 Elastic micro structure

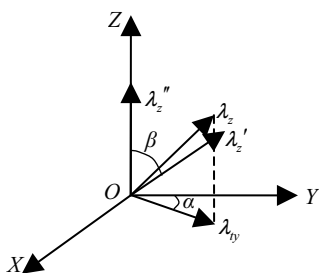


图 7 向量旋转示意图

Fig.7 Vector rotating sketch

局坐标 $OXYZ$ 下的位置示意图。 λ_z 在 XOY 平面的投影 λ_{zy} 与 Y 轴的夹角为 α ，先将 λ_z 绕 Z 轴旋转 α 到 YOZ 平面内， λ_z 变为 λ'_z ， λ'_z 与 Z 轴夹角为 β ，再将 λ'_z 绕 X 轴旋转 β 使 λ_z 与 Z 轴重合，旋转矩阵为：

$$C = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

则单位方向向量 (x_{11}, x_{12}, x_{13}) 、 (y_{11}, y_{12}, y_{13}) 可以用下式定义：

$$[x_{11}, x_{12}, x_{13}, 1] = [1, 0, 0, 1]C^{-1} \quad (2)$$

$$[y_{11}, y_{12}, y_{13}, 1] = [0, 1, 0, 1]C^{-1} \quad (3)$$

整理得：

$$(x_{11}, x_{12}, x_{13}) = (\cos \alpha, -\sin \alpha, 0) \quad (4)$$

$$(y_{11}, y_{12}, y_{13}) = (\sin \alpha \cos \beta, \cos \alpha \cos \beta, -\sin \beta) \quad (5)$$

通过上述方法可以建立各弹性微元体的局部坐标。

本文中，全局坐标用 $OXYZ$ 表示，局部坐标用 $oxyz$ 表示，准静态加载方向为全局坐标 Z 轴负方向。

2.3 弹性微元变形模式分析

2.3.1 弹性微元空间运动分析

截断后，金属橡胶数值模型被分解为一系列弹性微元体。分析准静态加载前后弹性微元的空间运动情况，以便对内部机理进行探索。图 8 为任选的一个弹性微元在加载前后空间位置的三向视图。浅色部分为加载前弹性微元的空间位置，深色部分为加载后弹性微元的空间位置。弹性微元的节点坐标位移包括平移、转动和弹性变形 3 部分。由图 8 可知，弹性微元的主要空间运动为空间平移。

2.3.2 弹性微元弹性变形分析

为了进一步对弹性微元的变形情况进行研究，在节点位移中减去弹性微元的空间平移成分。弹性微元的空间平移量用其所有节点在相应方向位移的均值估算，例如 x 方向的位移大小为：

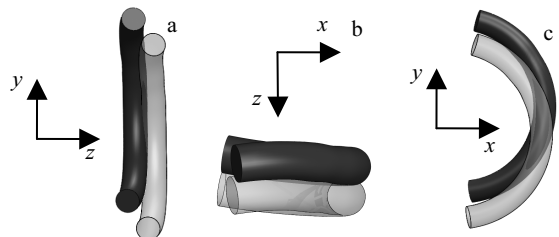


图 8 弹性微元运动示意图

Fig.8 Motion of the elastic micro structure: (a) left view, (b) top view, and (c) front view

$$\bar{d}_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_{xi} \tag{6}$$

式中， \bar{d}_x 为弹性微元在 x 方向的平均位移， d_{xi} 为各节点在 x 方向的位移， n 为微元上的节点数量。

在节点位移中减去 x 、 y 、 z 3 个方向的平移成分后，弹性微元在加载前后的三向视图如图 9 所示。图中浅色部分为加载前弹性微元的几何构型，深色部分为加载后弹性微元的几何构型。可见，弹性微元并无明显的空间转动。这是由于加载量相对较小，又被分配到众多的弹性微元体上，而分配到每个弹性微元上的运动主要体现为平移运动，因此，弹性微元的空间转动很小。为简化起见，本文不考虑弹性微元的转动，假设减去空间平移成分后，所剩余的变形即为微元体的弹性变形。

(1) 弹性微元 z 向弹性变形分析

本研究将弹性微元的弹性变形分为局部坐标中的 z 向弹性变形和 xoy 平面内的弹性变形两方面。

首先分析 z 向的弹性变形。图 9 反映了弹性微元在 z 向和 xoy 平面内的弹性变形情况。为了更好地观察弹性微元在局部坐标 z 向的变形情况，将变形前后弹性微元各节点的 z 向坐标做图，如图 10 所示。图 10 中，虚线表示加载前微元上各节点的 z 向坐标，实线表示减

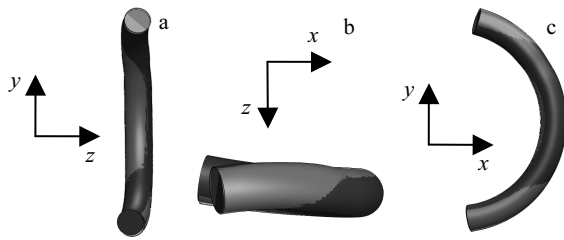


图 9 弹性变形对比

Fig.9 Comparison of elastic deformation: (a) left view, (b) top view, and (c) front view

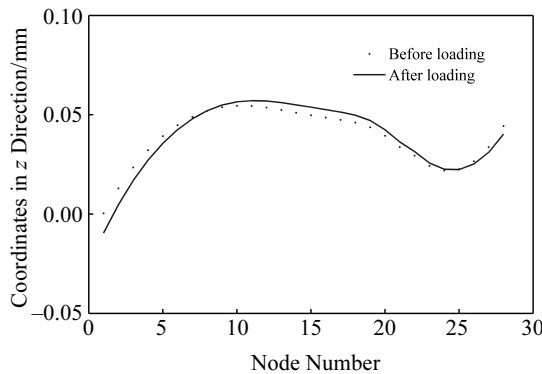


图 10 弹性微元节点 z 向坐标

Fig.10 z -coordinates of nodes of the elastic micro structure

去平移成分的加载后微元 z 向坐标，2 条曲线的差异可以反映弹性微元在 z 向的弹性变形情况。由图 10 可见，弹性微元在 z 向上并没有整体偏向 z 轴正向或整体偏向 z 轴负向，而是两端向 z 轴负向发生弹性变形，中间部分向 z 轴正向发生弹性变形，这主要是由于该微元受到相邻微元作用的结果。

图 11 表示在准静态加载时微元与邻近微元的相互作用。图中深色部分表示该微元，浅色部分表示其邻近微元。在局部坐标 z 向，随着载荷的增加，该微元向 z 轴负向移动，并与邻近微元发生接触作用，导致该微元发生了如图 10 所示的弹性变形。

通过上例可知，弹性微元未必整体向 z 轴正向或 z 轴负向发生弹性变形，在邻近微元的作用下，可能发生部分向 z 轴正向、部分向 z 轴负向的弹性变形。此时，弹性微元在 z 向上发生的弹性变形可以等效为若干尺寸更小的平面悬臂曲梁并联。

(2) 弹性微元 xoy 平面内弹性变形分析

将弹性微元轴线节点的 x 、 y 坐标做图，如图 12 所示。图中虚线表示变形前微元的位置，实线表示变形后微元的位置。由图可知， xoy 平面内微元的弹性变形量很小，弹性微元在 xoy 平面内发生了使微元两端点距离

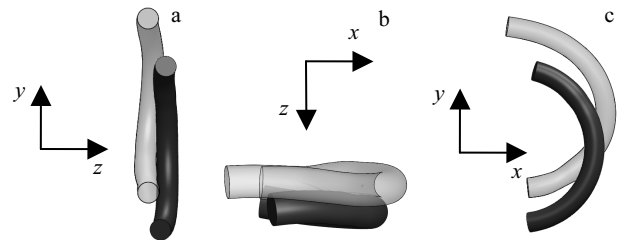


图 11 弹性微元与邻近微元的相互作用

Fig.11 Interaction between adjacent micro structures: (a) left view, (b) top view, and (c) front view

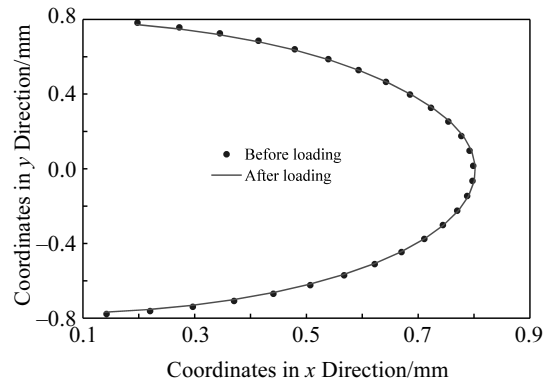


图 12 弹性微元节点坐标

Fig.12 Coordinates of nodes of the elastic micro structure

变小的弯曲变形。

图 13 为加载后，该弹性微元的应力状态。可见，应力最大位置约在弹性微元的中部，这进一步验证了这种变形模式的正确性。发生这种变形主要是由于：一方面，该截断方法使弹性微元的 2 个端点在加载方向的坐标分别为最大和最小值，使得弹性微元整体上承受了加载方向的压缩载荷；另一方面，金属橡胶由螺旋卷制备毛坯并冲压成形，这一过程使金属丝螺旋结构相互嵌入，弹性微元与邻近微元的接触位置较多地发生于其所在平面的两侧，较少地发生于微元圆弧的内外两侧，该结论可以由图 14 进行验证。图 14 是该微元与其邻近微元的空间位置关系。图中深色部分表示该微元，浅色部分是该微元的相邻微元。可见，接触作用较多地发生在该微元所在平面的两侧，而微元圆弧内外两侧与外界接触作用较少，使 xoy 平面内不容易发生更加复杂的弹性变形。

3 数学模型

3.1 弹性微元 z 向刚度数学模型

通过上述分析可知，局部坐标下，弹性微元的 z 向弹性变形可以用若干个平面悬臂曲梁的并联描述。首先建立单个悬臂曲梁的力学模型，将悬臂曲梁简化为直径

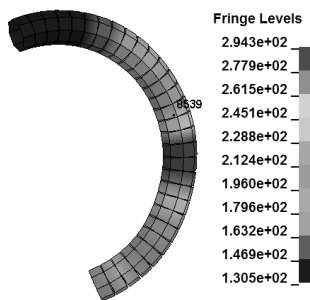


图 13 弹性微元应力状态
Fig.13 Stress state of the elastic micro structure

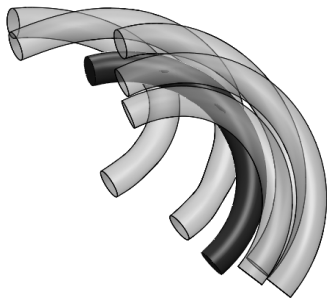


图 14 微元与邻近微元的相对位置
Fig.14 Location of elastic micro structures

为 D 的圆弧，在全局坐标系 $OXYZ$ 和局部坐标系 $oxyz$ 中建立悬臂曲梁受力模型，如图 15 所示。悬臂曲梁位于局部坐标 xoy 平面内，A 点固定，B 点受 z 向接触作用力 F_z 。

平面曲梁 z 向受力分析如图 16 所示。曲梁上任意一点 C 处的弯矩和扭矩分别为：

$$M = F_z I_{BD} = \frac{1}{2} F_z D \sin \theta \tag{7}$$

$$T = F_z I_{CD} = \frac{1}{2} F_z D (1 - \cos \theta) \tag{8}$$

由卡式定理^[12]得曲梁 z 方向的变形为：

$$\Delta z = \int_0^{\varphi} \frac{\partial M}{\partial F_z} \frac{M}{EI} ds + \int_0^{\varphi} \frac{\partial T}{\partial F_z} \frac{T}{GI_p} ds \tag{9}$$

式中， $ds = Dd\theta/2$ ， θ 为极角 ($0 \leq \theta \leq \varphi$)； E 、 G 分别为金属丝的弹性模量和切变模量，且 $G = E/(2 + 2\mu)$ ， μ 为泊松比； I 、 I_p 分别为金属丝截面惯性矩和极惯性矩，其中 $I = \pi d^4/64$ 、 $I_p = \pi d^4/32$ ； d 为金属丝直径。

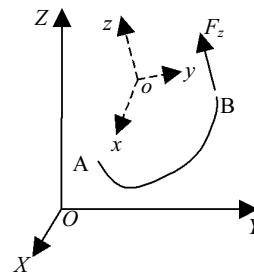


图 15 悬臂曲梁受力模型
Fig.15 Loading model of curved cantilever beam

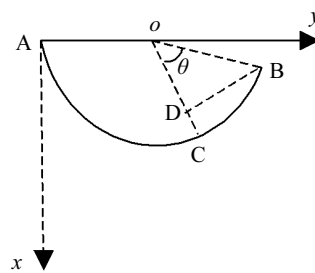


图 16 z 向受力分析
Fig.16 Loading analysis in z direction

将各参数代入式 (9)，积分得：

$$\Delta z = \frac{8F_z D^3}{\pi E D^4} f(\varphi) \tag{10}$$

式中，

$$f(\varphi) = 2\varphi - 2\sin \varphi + \mu \left(\frac{3}{2} \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi - 2\sin \varphi \right) \tag{11}$$

则悬臂曲梁 z 方向的刚度为:

$$k_z^i = \frac{\pi E d^4}{8 D^3 f(\varphi)} \quad (12)$$

若弹性微元在 z 向由 h 个曲梁并联而成, 则弹性微元 z 向的刚度为:

$$k_z = \frac{\pi h E d^4}{8 D^3 f(\varphi)} \quad (13)$$

若将弹性微元简化为二分之一圆弧, 则 $\pi = h\varphi$, 式 (13) 变为:

$$k_z = \frac{\pi^2 E d^4}{8 D^3 F(h)} \quad (14)$$

式中,

$$F(h) = (2 + \frac{3}{2}\mu)\pi^2 \frac{1}{h^2} + \frac{1}{4}\mu\pi \frac{1}{h} \sin(\frac{2\pi}{h}) - (2 + 2\mu)\pi \frac{1}{h} \sin(\frac{\pi}{h}) \quad (15)$$

3.2 弹性微元 xoy 平面内刚度数学模型

根据弹性微元在 xoy 平面内的弹性变形分析, 在局部坐标系 xoy 平面内建立曲梁弯曲变形模型, 如图 17 所示。将曲梁简化为半径为 R 的二分之一圆弧, A 点固定, B 点受 y 方向接触作用力 F_y 。

u 、 v 分别表示曲梁各点轴向和径向位移, 根据高等材料力学^[13], 平面曲梁在 v 方向的挠度微分方程为:

$$\frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{v}{R^2} = -\frac{M}{EI} \quad (16)$$

式中 $ds = R d\theta$, θ 为极角 ($0 \leq \theta \leq \pi$), E 为金属丝的弹性模量, I 为金属丝截面惯性矩, M 为曲梁弯矩。曲梁任意一点 C 处的弯矩为:

$$M = -F_y R \sin \theta \quad (17)$$

将各参数代入式 (16), 可得:

$$\frac{d^2 v}{d\theta^2} + v = \frac{F_y R^3 \sin \theta}{EI} \quad (18)$$

该微分方程的通解为:

$$v = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta - \frac{F_y R^3}{2EI} \theta \cos \theta \quad (19)$$

关于位移 v 的边界条件为: $\theta = \pi$ 时, $v = 0$, $\frac{dv}{d\theta} = 0$,

由此可求得待定系数 C_1 、 C_2 , 可得式 (18) 的通解为:

$$v = \frac{\pi F_y R^3}{2EI} \cos \theta + \frac{F_y R^3}{2EI} \sin \theta - \frac{F_y R^3}{2EI} \theta \cos \theta \quad (20)$$

当 $\theta = 0$ 时, 可得:

$$\Delta y = \frac{\pi F_y R^3}{2EI} \quad (21)$$

则悬臂曲梁 y 方向的刚度为:

$$k_y = \frac{E d^4}{4 D^3} \quad (22)$$

式中, d 为金属丝直径; D 为圆弧直径。

3.3 非线性刚度的数学模型

本文建立局部坐标的方法, 可以使局部坐标 yoz 平面与元件加载方向平行。求得弹性微元在 z 向刚度 k_z 和 y 向刚度 k_y 后, 可以计算弹性微元在元件加载方向的刚度贡献, 如图 18 所示。若局部坐标 z 轴与全局坐标 Z 轴夹角为 ϕ , 则弹性微元在加载方向的刚度为:

$$k = k_z \cos \phi + k_y \sin \phi = \frac{\pi^2 E d^4}{8 D^3 F(h)} \cos \phi + \frac{E d^4}{4 D^3} \sin \phi \quad (23)$$

材料内部组织结构十分复杂, 对弹性微元间的串并联关系难以完全准确获取。本文用图 19 所示的分层串并联模型对弹性微元间的串并联关系进行近似描述。图 19 中, 取一单位立方体微元, 假定在垂直于加载方向的单位面积上有 m 个弹性微元并联, 在加载方向上的单位长度上有 n 层弹性微元串联。若该单位立方体微元与金属橡胶在加载方向有相同的刚度特性, 则金属橡胶材料在加载方向的应力-应变关系为:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E = \frac{mk}{n} \quad (24)$$

而实际上金属橡胶材料内部金属丝分布较为均匀, 设金属橡胶材料的密度为 ρ_{MR} , 金属丝材料密度为 ρ , 则体积 V 内总的弹性微元数量为:

$$N_{EMS} = \frac{8\bar{\rho}V}{\pi^2 d^2 D} \quad (25)$$

式中, $\bar{\rho} = \rho_{MR} / \rho$ 。

材料单位体积内包含的弹性微元数量为:

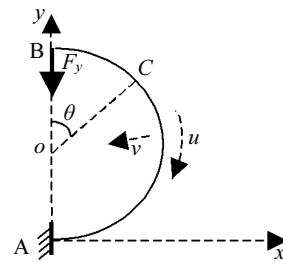


图 17 悬臂曲梁弯曲模型

Fig.17 Bending model of curved cantilever beam

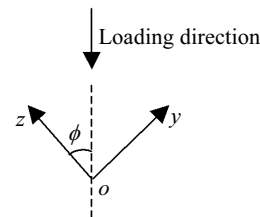


图 18 局部坐标 yoz 平面

Fig.18 Plane yoz of local coordinates

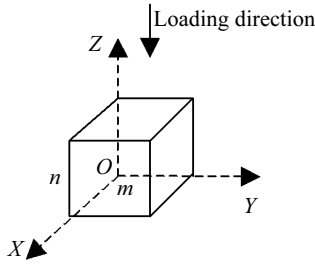


图 19 弹性微元串并联模型

Fig.19 Series-parallel model of elastic micro structures

$$n_{EMS} = \frac{8\bar{\rho}}{\pi^2 d^2 D} \quad (26)$$

假设金属橡胶材料中弹性微元均匀分布，则各坐标方向上弹性微元的线密度为：

$$\rho_1 = \left(\frac{8\bar{\rho}}{\pi^2 d^2 D} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (27)$$

设 $m = C_1 \rho_1^2$ ， $n = C_2 \rho_1$ ，则

$$\frac{m}{n} = C \rho_1 = C \left(\frac{8\bar{\rho}}{\pi^2 d^2 D} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (28)$$

式中， C 为待定系数，它是表示力学模型中弹性微元分布与实际材料内部弹性微元分布差异的修正系数。

将式 (23)、(28) 代入式 (24)，可得：

$$E(\varepsilon) = C \left(\frac{8\bar{\rho}}{\pi^2 d^2 D} \right)^{\frac{1}{3}} \left[\frac{\pi^2 E d^4}{8 D^3 F(h)} \cos \phi + \frac{E d^4}{4 D^3} \sin \phi \right] \quad (29)$$

3.4 确定 h 与 ε 的关系

式 (29) 中， h 为应变 ε 的函数， h 与 ε 的函数关系表示弹性微元在局部坐标 z 向上由接触作用变为并联曲梁的个数与应变之间的关系。当刚开始加载时，弹性微元并没有与周边金属丝发生接触作用，在局部坐标 z 向上并没有发生多段曲梁并联的情况，此时 $h=1$ ，对应 $F(h)$ 为：

$$F_0 = \left(2 + \frac{3}{2} \mu \right) \pi^2 \quad (30)$$

根据“载荷-位移”实验数据，可以计算元件的刚度 K_{MR} ，进而得到材料的弹性模量：

$$E_{MR} = \frac{K_{MR} L_{MR}}{A_{MR}} \quad (31)$$

式中， L_{MR} 为金属橡胶元件在加载方向的厚度尺寸， A_{MR} 为金属橡胶元件垂直于加载方向的截面面积。

加载量 D_{MR} 对应的加载方向应变为：

$$\varepsilon_{MR} = \frac{D_{MR}}{L_{MR}} \quad (32)$$

在“载荷-位移”数据中，设第 1 个数据点对应的应

变为 ε_0 ，根据式 (31) 可以得到 ε_0 对应的金属橡胶弹性模量 E_0 。此时加载刚刚开始， $F(h)$ 近似等于 F_0 ，将 E_0 、 F_0 代入式 (29) 求得：

$$C = \frac{2E_0(4+3\mu)\pi^{\frac{2}{3}}D^{\frac{10}{3}}}{Ed^{\frac{10}{3}}\bar{\rho}^{\frac{1}{3}}[\cos\phi+\sin\phi(4+3\mu)]} \quad (33)$$

根据实验数据和式 (32) 可得每一个数据点对应的应变 ε_i ，根据实验数据和式 (31) 可得每一个数据点对应的弹性模量 E_i ，根据离散数据 E_i 、式 (29)、(33) 可以得到应变为 ε_i 时对应的离散数据 $F(h_i)$ ，用 MATLAB 软件求得 $F(h_i)$ 对应的数值解 h_i ，最后用离散数据 ε_i 与 h_i 做图，如图 20 中虚线所示。

可见， h 与 ε 近似成线性关系，因此可设

$$h = a\varepsilon + b \quad (34)$$

拟合 $h = a\varepsilon + b$ ，如图 20 中实线所示。

最终，综合式 (15)、(29)、(34) 可得金属橡胶材料的非线性弹性模量的数学表达式：

$$E(\varepsilon) = \frac{1}{2} C E \bar{\rho}^{\frac{1}{3}} d^{\frac{10}{3}} \pi^{-\frac{2}{3}} D^{-\frac{10}{3}} \left[\frac{\pi}{2G(\varepsilon)} \cos \phi + \sin \phi \right] \quad (35)$$

式中，

$$G(\varepsilon) = \frac{(4+3\mu)\pi}{2(a\varepsilon+b)^2} + \frac{\mu}{4(a\varepsilon+b)} \sin\left(\frac{2\pi}{a\varepsilon+b}\right) - \frac{2+2\mu}{a\varepsilon+b} \sin\left(\frac{\pi}{a\varepsilon+b}\right) \quad (36)$$

式 (35)、(36) 中各项参数的物理意义分别为： C 为修正系数，反映了所用力学模型与实际材料中弹性微元在空间分布的差异； E 为金属丝弹性模量； $\bar{\rho}$ 为相对密度； d 为金属丝直径； D 为螺旋卷直径； ϕ 为弹性微元局部坐标 z 轴与全局坐标 Z 轴夹角的均值，反映了弹性微元的空间方位信息； μ 为金属丝材料的泊松比； a 表示弹性微元在局部坐标 z 向上由接触作用变为并联曲梁的个数随应变 ε 增长的速率，它从细观上反映了金属橡胶刚度非线性的强弱； b 表示应变为 0 时，弹性微元在局部坐标 z 向上由接触作用变为并联曲梁的个数， b 的理想数值为 1。

4 实验验证

式(35)为金属橡胶非线性弹性模量的解析表达式，为了对其准确性进行验证，将其进行数值积分得到金属橡胶材料的应力-应变曲线，并与实验结果进行对比。本研究分别取 3 组不同的元件进行对比，其中一组曲线如图 21 所示。由图可见，非线性弹性模量数学模型与实验结果吻合良好，说明该数学模型的可靠性、准确性较好，对金属橡胶材料的非线性刚度能够较好地进行预测。

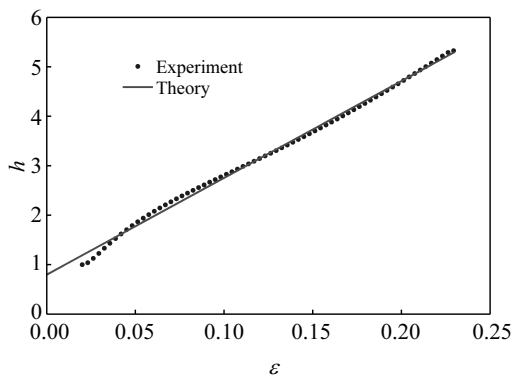


图 20 h 与 ε 的关系

Fig.20 Relationship between h and ε

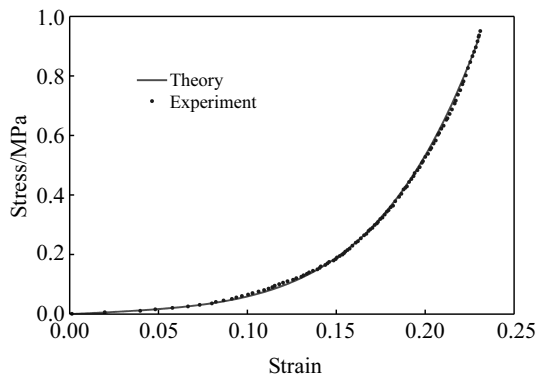


图 21 理论模型与实验结果对比

Fig.21 Comparison of theoretical model and experimental result

5 结 论

1) 作为研究基础的数值模型完全依据实际材料、工艺参数建立,能够较好地反映金属橡胶材料的组织结构、尺寸、非线性刚度特性,可靠性较好。

2) 基于数值模型,建立了金属橡胶细观弹性微元模型及其局部坐标,描述了材料非线性刚度特性的细观机理。加载过程中,弹性微元的空间运动以平移为主,空间转动很小;弹性微元在局部坐标 z 向上发生的弹性变形可以等效为若干尺寸更小的平面悬臂曲梁并联,并联曲梁个数 h 与应变 ε 成线性关系;弹性微元在局部坐标 xoy 平面内的弹性变形是一种使弹性微元两端点距离变小的弯曲变形。

3) 通过对弹性微元变形模式进行分析,建立了金属

橡胶材料非线性弹性模量的数学模型,数学模型各参数物理意义明确,不仅包含了材料的基本结构参数(E 、 $\bar{\rho}$ 、 d 、 D),还包含了细观特征参数(ϕ)和非线性刚度机理参数(a),能够较好地反映出金属橡胶非线性刚度的细观机理,较为准确地描述材料承受压缩载荷时的非线性刚度特性,对金属橡胶的设计具有一定指导意义。

参考文献 Reference

[1] Setekleiv A Eddie, Hallvard F Svendsen. *Chemical Engineering Science*[J], 2012, 68(1): 624

[2] Ma Yanhong, Liang Zhichao, Wang Hong *et al.* *Journal of Sound and Vibration*[J], 2013, 332(22): 5710

[3] Tan Qingbiao, He Guo. *Materials Science and Engineering A*[J], 2012, 546(1): 233

[4] ЧЕГОДАЕВ Д Е, МУЛЮКИН О П, КОЛТЫГИН Е В. Translated by Li Zhongying(李中郢). *Design of Metal Rubber Products (金属橡胶构件的设计)*[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2000: 99

[5] Chen Yanqiu(陈艳秋), Guo Baoting(郭宝亭), Zhu Zigen(朱梓根). *Journal of Aerospace Power(航空动力学报)*[J], 2002, 17(4): 416

[6] Guo Baoting(郭宝亭), Zhu Zigen(朱梓根), Cui Rongfan(崔荣繁). *Journal of Aerospace Power(航空动力学报)*[J], 2004, 19(3): 314

[7] Peng Wei(彭 威), Bai Hongbai(白鸿柏), Zheng Jian(郑 坚) *et al.* *Journal of Experimental Mechanics(实验力学)*[J], 2005, 20(3): 454

[8] Li Yuming(李宇明), Peng Wei(彭 威), Bai Hongbai(白鸿柏) *et al.* *Chinese Journal of Mechanical Engineering(机械工程学报)*[J], 2005, 41(9): 38

[9] Li Yuyan(李宇燕), Huang Xieqing(黄协清). *Acta Armamentarii (兵工学报)*[J], 2008, 29(7): 819

[10] Cao Fengli(曹凤利), Bai Hongbai(白鸿柏), Ren Guoquan(任国全) *et al.* *Chinese Journal of Mechanical Engineering(机械工程学报)*[J], 2012, 48(24): 61

[11] Huang Kai(黄 凯), Bai Hongbai(白鸿柏), Lu Chunhong(路纯红) *et al.* *Rare Metal Materials and Engineering(稀有金属材料与工程)*[J], 2016, 45(3): 681

[12] Feng Lifu(冯立富), Tan Zhigao(谈志高), Liu Yunting(刘云庭). *Engineering Mechanics(工程力学)*[M]. Beijing: Weapon Industry Press, 1997: 439

[13] Liu Hongwen(刘鸿文). *Advanced Material Mechanics(高等材料力学)*[M]. Beijing: Higher Education Press, 1985: 62

Analysis of Microcosmic Mechanism of Metal Rubber's Stiffness Based on Numerical Model

Huang Kai¹, Bai Hongbai¹, Lu Chunhong¹, Cao Fengli¹, Gao Hongfei²

(1. Engineering University of the Army, Shijiazhuang 050003, China)

(2. Baicheng Weaponry Test Centre, Baicheng 137000, China)

Abstract: Based on the numerical model established with actual parameters of raw materials and processes, the microcosmic mechanism of metal rubber's nonlinear stiffness was researched. The numerical model was verified in some respects, including forming force, tissue structure, size and quasi-static loading curve. The tissue structure of metal rubber was decomposed and an elastic micro structure model was set up. The spatial motion and elastic deformation of elastic micro structure were studied. A mathematic model of metal rubber's nonlinear stiffness property was built. In the quasi-static loading process, the translation of elastic micro structure is the main spatial motion, and its spatial rotation is very small. The elastic deformation in z direction can be regarded as a parallel connection of several curved beams. The elastic deformation in xoy plane can be treated as a curved beam's bending deformation, making the distance between two endpoints smaller. The mathematical model agrees with test results well and it contains basic structural parameters, micro feature parameters and nonlinear stiffness mechanism parameters. These parameters have clear physical meaning and the mathematic model has some guiding significance for metal rubber's design.

Key words: metal rubber; nonlinear stiffness; micro mechanism; numerical model

Corresponding author: Huang Kai, Candidate for Ph. D., Engineering University of the Army, Shijiazhuang 050003, P. R. China, E-mail: hk420604@163.com